

EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER

Forkurs for 3-årig ingeniørutdanning og integrert masterstudium i teknologiske fag og tilhørende halvårig realfagskurs.

Universitetet i Sørøst-Norge, OsloMet, Høgskulen på Vestlandet, Høgskolen i Østfold, NTNU, Universitetet i Agder, Universitetet i Stavanger, UiT-Norges arktiske universitet, NKI, Metis.

Eksamensoppgave

MATEMATIKK

Bokmål

31. mai 2024

kl. 9.00-14.00

Hjelpemidler:

Godkjente formelsamlinger i matematikk og fysikk
Godkjent enkel kalkulator

Andre opplysninger:

Oppgavesettet består av 5 sider medregnet forsiden, og inneholder 9 oppgaver.

Ved vurdering teller alle deloppgaver likt.
Besvarelsen må være så fullstendig at resonnementet kommer klart fram.

Oppgave 1

Skriv så enkelt som mulig.

a)

$$\frac{4a^2 - b^2}{2ab + b^2} + 1$$

b)

$$\frac{a \cdot \ln b - \ln b^2}{(a - 2) \cdot \ln \sqrt{b}}$$

Oppgave 2

a) Gitt $\cos x = \frac{2}{5}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Finn eksaktverdi til: $\sin x$, $\sin 2x$ og $\tan 2x$.

b) Gitt funksjonen

$$r(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

Finn $\lim_{x \rightarrow 2} r(x)$ og $\lim_{x \rightarrow 1} r(x)$ ved regning.

Oppgave 3

Deriver funksjonene og forenkle svarene mest mulig.

a)

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{x^2}$$

b)

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln(2x^2 - 2x^4)$$

c) Finn likningen for tangenten til funksjonen

$$h(x) = x \ln x$$

gjennom punktet $(e, h(e))$. Oppgi svaret med eksakte verdier.

Oppgave 4

Løs ulikheten og likningene.

a)

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

b)

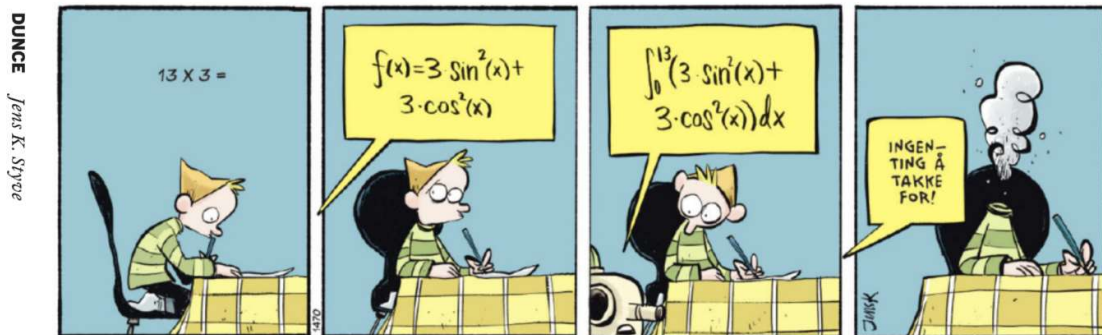
$$\frac{18 - 5^x}{5^x} = 5^x + 2$$

c)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin(2\pi x)} - 2 = 0, \quad x \in [0, 1]$$

Oppgave 5

- a) I tegneseriestripen under skal en gutt regne ut $13 \cdot 3$. Han får «hjelp» av en robot. Forklar hvorfor robotens innspill gir rett svar.



Regn ut integralene.

b)

$$\int 3(x^2 + 4x + 4) dx$$

c)

$$\int \frac{3}{x^2 + 4x + 4} dx$$

d)

$$\int_{-3}^{-1} \frac{x + 2}{x^2 + 4x} dx$$

Oppgave 6

Gitt funksjonen

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 4x - \frac{5}{2}$$

- a) Vis at $x = -\frac{1}{2}$ er et nullpunkt for f , og finn ev. andre nullpunkter.
- b) Finn eventuelle ekstremalpunkter på grafen til f ved regning, og drøft funksjonens monotoniegenskaper.
- c) Finn likningen for normalen til f der grafen skjærer y-aksen.

Oppgave 7

Punktene $A(1,1,0)$, $B(2,4,0)$ og $C(2,2,4)$ danner hjørnene i trekanten ABC.

- a) Finn vinkel A i trekanten.
- b) Finn arealet av trekanten ABC.
- c) Finn en likning og en parameterframstilling til planet β gjennom punktene A, B og C.
- d) Et punkt D ligger på y-aksen. Finn koordinatene til D slik at $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$.
- e) Et punkt E er gitt slik at $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. Finn koordinatene til punktet E.

Oppgave 8

Gitt en aritmetisk følge med $a_1 = \frac{1}{3}$ og $d = \frac{5}{3}$. Python-koden under regner ut den minste verdien av n som er slik at $a_n \geq 200$.

```
1 a1 = 1/3
2 d = 5/3
3 n = 1
4 an = a1
5 while an < 200:
6     an = an + 
7     n = 
8 print(f"n = {n}, an = {an}")
```

- a) Hva skal stå i boksene på linje 6 og 7? Forklar hva som skjer i while-løkken.
- b) Finn verdien av n som programmet regner ut.

Oppgave 9

Du har fått utlevert 100 m gjerde, og skal gjerde inn et kvadratisk område og et sirkelformet område. Kvadratet har sidekant x og sirkelen har radius r , begge målt i meter.

- a) Vis at $x = 25 - \frac{1}{2}\pi r$.
- b) Finn den verdien av r som gir så lite samlet areal som mulig. Hva er verdien av x da?
- c) Størst mulig areal får vi ved kun å lage en sirkel (dvs. $x = 0$). Hvor mange prosent større areal får du da enn om du kun lager et kvadrat?