EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER

Forkurs for 3-årig ingeniørutdanning og integrert masterstudium i teknologiske fag og tilhørende halvårig realfagskurs.
Høgskolen i Sørøst-Norge, Høgskolen i Oslo og Akershus, Høgskulen på Vestlandet, Høgskolen i Østfold, NTNU, Universitetet i Agder, Universitetet i Stavanger, UiT-Norges arktiske universitet, Rogaland kurs- og kompetansesenter

Eksamensoppgave

MATEMATIKK

Bokmål

24. mai 2017

kl. 9.00-14.00

Hjelpemidler:

Godkjente formelsamlinger i matematikk og fysikk.
Godkjent kalkulator.

Andre opplysninger:

Oppgavesettet består av 4 sider medregnet forsiden, og inneholder 6 oppgaver.

Ved vurdering teller alle deloppgaver likt.

Oppgave 1

a) Forenkle uttrykket så mye som mulig:

$$\frac{\sqrt{a^3}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt[6]{a}\right)^2}$$

b) Løs ulikheten:

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+2}{x+1}\leq\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}$$

Løs likningene ved regning:

c)

$$2\sqrt{3}\sin(2x)-3=0\ ,\qquad x\in[0,2\pi\rangle$$

d)

$$\ln(x^2)-\ln(3x-2)=0$$

e) En rekke er gitt som:

$$2+4e^x+8e^{2x}+16e^{3x}+\cdots$$

For hvilke verdier av kvotienten k er rekken konvergent?

Deriver funksjonene:

f) $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$

g) $g(x)=\ln\sqrt{\cos 2x}$

Regn ut integralene:

h)

$$\int\frac{2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$$

i)

$$\int_0^\infty xe^{1-x^2}\,dx$$

j) Løs differensiallikningen:

$$y'+x^2y=x^2$$

med randkravet $y(0)=0$.

Oppgave 2

Gitt funksjonen f ved funksjonsuttrykket $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.

a) Vis at:

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

b) Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Finn eventuelle asymptoter til funksjonen $f(x)$ og skisser grafen med eventuelle asymptoter i intervallet $x \in \langle -5, 5 \rangle$.

d) Finn tangenten til funksjonsgrafen for $x = 0{,}40$.

e) Grafen til f og den rette linja $g(x) = \frac{4}{5}x$ avgrenser et flatestykke i første kvadrant. Beregn arealet av flatestykket.

Oppgave 3

Gitt punktene $A(6, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$ og $C(0, 0, 3)$.

a) Finn arealet av trekanten ABC.

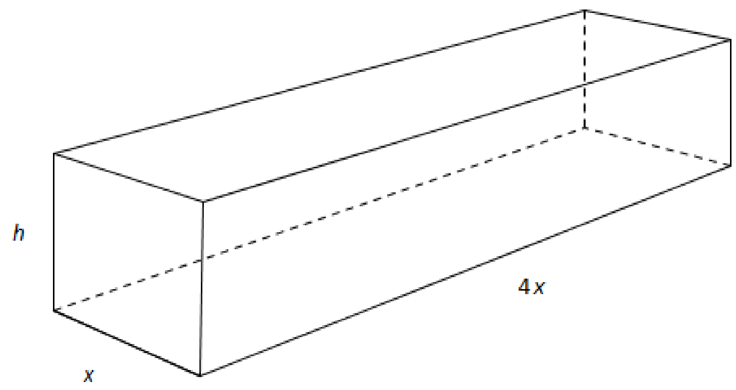
b) En linje l gjennom C står vinkelrett på ΔABC. Finn en parameterframstilling for denne linjen.

c) Finn koordinatene til linjen l fra punkt b) sitt skjæringspunkt med xy −planet.

d) Finn likningen for planet gjennom de tre punktene A, B og C.

Oppgave 4

Vi har et rett prisme der lengden av grunnflaten er fire ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^3. Vi setter bredden lik x cm. Se skissen.



a) Vis at $h = \frac{50}{x^2}$

b) Vis at overflaten O av prismet kan skrives:

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$$

c) Vis at $O'(x) = \frac{-500+16x^3}{x^2}$ og bruk dette til å finne den minste overflaten O som prismet kan ha.

Hva er lengden, bredden og høyden nå?

Oppgave 5

Et tomteareal har form av en trekant ABC der $AB = 120$ m, $\angle A = 45°$ og $\angle B = 30°$.

a) Finn de manglende sidene og vinklene i trekanten. Hvis mulig, vis utregning med eksakte verdier.

b) Beregn arealet av tomta (med eksakte verdier hvis mulig).

c) Anta at ei rett linje CD fra C ned på AB deler tomta i to (D ligger på AB). Arealet av trekanten ADC skal utgjøre en tredjedel av hele tomtas areal. Hvor lang blir AD?

Oppgave 6

To personer a og b skyter annenhver gang på en ballong. Den som treffer ballongen først har vunnet spillet. La A og B være begivenhetene at henholdsvis a og b treffer ballongen i et enkelt skudd. Anta at disse begivenhetene er uavhengige. Anta at $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ og at a skyter først.

a) Regn ut følgende sannsynligheter:

- Sannsynligheten for at a bommer i et enkelt skudd (dvs. $P(\bar{A})$).
- Sannsynligheten for at a bommer på første forsøk og b treffer (dvs. $P(\bar{A} \cap B)$?).
- Sannsynligheten for at det blir skutt tre ganger og at a vinner spillet.
- Sannsynligheten for at det blir skutt fem ganger og at a vinner spillet.
- Den totale sannsynligheten for at det blir skutt en, tre eller fem ganger og at a vinner.

b) Hva er sannsynligheten for at a vinner spillet?