EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER

Forkurs for ingeniørutdanning og maritim høgskoleutdanning

Universitetet i Stavanger, Universitetet i Tromsø, Høgskolen i Buskerud,
Høgskulen i Sogn og Fjordane, Høgskolen i Sør-Trøndelag, Høgskolen i Telemark,
Høgskolen i Vestfold, Høgskolen i Østfold, Høgskolen i Ålesund,
Sjøkrigsskolen, Bergen fagskole, Høgskolen i Gjøvik,
Høgskolen i Nesna, Kvinneuniversitetet

Eksamensoppgave

2. juni 2009

MATEMATIKK

Bokmål

Eksamenstid:
5 timer

Hjelpemidler:
Godkjent tabell og kalkulator.

Andre opplysninger:
Dette oppgavesettet inneholder seks oppgaver med deloppgaver.
Du skal svare på alle oppgavene og deloppgavene.

Oppgavesettet har fire tekstsider medregnet forsiden, og i tillegg to sider med formler.

OPPGAVE 1

a) Gjør uttrykket så enkelt som mulig:

1) $\dfrac{3a^2-12}{2a+2} : \dfrac{6a+12}{a+1} =$ 2) $\dfrac{2a^{-2} \cdot b \cdot 3\sqrt{a}}{6a^{-3} \cdot \sqrt[3]{b^2}} =$

b) Løs likningene ved regning:

1) $2\tan x - 6 = 0$ $x \in [0°, 360°\rangle$

2) $e^{x+2} = 5^x$

3) $1 + \sqrt{x+5} = x$

c) Vi har gitt funksjonen $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}) + 3$

1) Bestem likevektslinje, amplitude, periode og faseforskyvning for f(x).

2) Beregn toppunkter og bunnpunkter for f(x) når $x \in [0, 6\rangle$

d) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = 2x^2 \cdot \ln x$ 2) $g(x) = \dfrac{2e^{5x}}{x}$

e) Beregn det ubestemte og bestemte integralet:

1) $\int (\frac{1}{2}x^2 + 2e^{2x} - 5)dx$ 2) $\int_1^e x^3 \cdot \ln x dx$

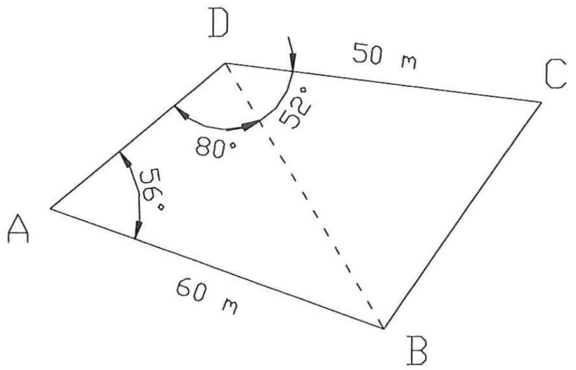
f) For ei uendelig geometrisk rekke har vi gitt det andre og det femte leddet:

$a_2 = \dfrac{2}{3}$ $a_5 = \dfrac{16}{81}$

1) Bestem det første leddet a_1 og kvotienten k.

2) Forklar hvorfor rekka er konvergent, og regn ut summen S.

OPPGAVE 2



Figuren er ei skisse av ei tomt ABCD.

a) Beregn sida AD, diagonalen BD og sida BC.

b) Beregn arealet av tomta.

OPPGAVE 3

Vi har gitt tre punkter i rommet: A(1, 2, 0), B(4, 3, 2) og D(3, 6, 2).

a) Beregn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\overrightarrow{AD}\right|$ og vinkelen mellom disse to vektorene.

b) Beregn koordinatene til et punkt C slik at ABCD blir et parallellogram.

c) Beregn arealet av parallellogrammet ABCD.

d) Et punkt T(x, 3, 7) er toppunkt i en pyramide med grunnflate ABCD. Beregn verdien av x slik at pyramidens volum er 12.

e) Beregn høyden i pyramiden.

OPPGAVE 4

Vi har gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \qquad D_f = \langle -3, 6]$$

a) Beregn funksjonens minimal- og maksimalpunkter.

b) Vis at f(x) har et vendepunkt for x = 1 og beregn likningen for tangenten i dette punktet.

c) Tegn grafen til f(x) og tangenten fra spørsmål b i samme koordinatsystem.

d) Beregn arealet som er avgrenset av grafen til f(x), linja $y = -x + \frac{2}{3}$, y-aksen og linja x = 3

OPPGAVE 5

Du skal lage en sylinderformet tank som skal ha et volum på 2,7 m^3.

a) Vis at tankens overflate A(r), kan uttrykkes som en funksjon av radien i endeflatene (r) slik:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{5{,}4}{r}$$

b) Regn ut den radien som gir minst overflate for denne tanken.

OPPGAVE 6

På en vegstrekning må du passere to fjelloverganger. Om vinteren vil vegen kunne bli stengt på disse stedene. Vi definerer hendelsene:

A – den første fjellovergangen er stengt.
B – den andre fjellovergangen er stengt.

Statistisk materiale fra de siste årene gir grunnlag for at disse sannsynlighetene gjelder for januar:

$P(A) = 0{,}15$, $P(B|A) = 0{,}60$ og $P(B|\overline{A}) = 0{,}10$

a) Er A og B disjunkte og/eller uavhengige utfall? Gi en kort forklaring.

b) Regn ut sannsynlighetene $P(\overline{A})$, $P(B)$ og $P(\overline{B})$?

c) Regn ut sannsynlighetene for:
   1) Den første fjellovergangen (A) er stengt, dersom den andre (B) er stengt.
   2) Begge fjellovergangene er stengt.

Supplerende formler i matematikk

Eksaktverdier på trigonometriske funksjoner

Radianer	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Grader	0°	30°	45°	60°	90°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	ubestemt

Vektorer

Vektorproduktet:
$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

Lengden av vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ er $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$

Areal av et parallellogram er $\quad A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Areal av en trekant $\quad A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

Trippelproduktet

Trippelproduktet $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Volum av parallellepiped $\quad V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av trekantet pyramide $\quad V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Numerisk integrasjon

Trapesmetoden

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)), \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Simpson-metoden

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)), \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sannsynlighetsregning

Total sannsynlighet $P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)$

Multiplikasjonsprinsippet $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots$